ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

α) $\bar{a}_\nu \to \bar{a}_0 \;\wedge\; \bar{b}_\nu \to \bar{b}_0 \Rightarrow \bar{a}_\nu + \bar{b}_\nu \to \bar{a}_0 + \bar{b}_0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\bar{a}_\nu \to \bar{a}_0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists \nu_1 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\ \nu \geq \nu_1 : \|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0\| < \varepsilon/2$ ①

$\bar{b}_\nu \to \bar{b}_0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists \nu_2 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\ \nu \geq \nu_2 : \|\bar{b}_\nu - \bar{b}_0\| < \varepsilon/2$ ②

έστω $\nu_0 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$

άρα, αφού προσθέσουμε τις ① + ② κατά μέλη θα έχουμε: $\|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0\| + \|\bar{b}_\nu - \bar{b}_0\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

• $\bar{a}_\nu + \bar{b}_\nu \to \bar{a}_0 + \bar{b}_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\ \nu \geq \nu_0 : \|(\bar{a}_\nu - \bar{a}_0) + (\bar{b}_\nu - \bar{b}_0)\| <$

$< \|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0\| + \|\bar{b}_\nu - \bar{b}_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

β) $a \in \mathbb{R}$ $\quad \bar{a}_\nu \to \bar{a}_0 \Rightarrow a \cdot \bar{a}_\nu \to a \cdot \bar{a}_0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\bar{a}_\nu \to \bar{a}_0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\ \nu \geq \nu_0 : \|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0\| < \varepsilon/|a|$

καθώς για $a \neq 0$

$a \cdot \bar{a}_\nu \to a \cdot \bar{a}_0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\ \nu \geq \nu_0 : \|a \cdot \bar{a}_\nu - a \cdot \bar{a}_0\| =$

$= |a| \cdot \|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0\| < \cancel{|a|} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{|a|}} = \varepsilon$

γ) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη

δηλ. $\bar{a}_\nu \to \bar{a}_0 \Rightarrow (\exists c > 0) : \|\bar{a}_\nu\| \leq c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{a}_\nu \in \bar{B}(\bar{0}, c)$

δ) ΘΕΩΡΗΜΑ (Bolzano-Weierstrass)

Κάθε φραγμένη ακολουθία $a_\nu, \nu \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ έχει (τουλάχιστον) μια συγκλίνουσα υπακολουθία

ΙΔΕΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ: Έστω $\bar{a}_\nu = (a_\nu^{(1)}, \dots, a_\nu^{(n)})$ φραγμένη

άρα $(\exists c > 0) : \|\bar{a}_\nu\| \leq c \Rightarrow \forall i = 1, 2, \dots, n$

$|a_\nu^{(1)}| \leq c \underset{\substack{BW \\ \text{ΑΠΛ}}}{\Rightarrow} \exists\ a_{k_\nu}^{(1)} \to a_0^{(1)}$ με a_{k_ν} την υπακολουθία της $a_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ ορίζοντας a_{k_ν} ως a_ν άρα

$a_\nu^{(1)} \to a_0^{(1)}$ και $|a_\nu^{(2)}| \leq c \underset{\substack{BW \\ \text{ΑΠΛ}}}{\Rightarrow} \exists\ a_{k_\nu}^{(2)} \to a_0^{(2)}$

άρα $\alpha_\nu^{(2)} \to \alpha_0^{(2)}$

Συνεπώς, έχουμε:

$\alpha_\nu^{(1)} \to \alpha_0^{(1)}, \alpha_\nu^{(2)} \to \alpha_0^{(2)}, \ldots, \alpha_\nu^{(n)} \to \alpha_0^{(n)}$

Έχουμε διαδοχικά n υπακολουθίες όπου η κάθε μια είναι υπακολουθία της προηγούμενης, και με μαθηματική επαγωγή προκύπτει το Θ. Bolzano-Wierstr στον χώρο $\mathbb{R}^n$. !!! $(a_{k_\nu} \subset a_\nu)$

ΔΗΛΑΔΗ $\quad a_{k_\nu}^{(i)} \to a_0^{(i)} \quad \forall i=1,2,\ldots,n$

ε) Κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει στο όριο της ακολουθίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Τα όρια των συγκλινουσών υπακολουθιών της (φραγμένης) $\bar{a}_\nu \subset \mathbb{R}^2$ ονομάζονται σσ της $(\bar{a}_\nu)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια ακολουθία $(\bar{a}_\nu) \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται ακολουθία Cauchy (ή βασική ακολουθία) $\iff$

$\iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu,\mu \in \mathbb{N})\ \nu,\mu \geq \nu_0 : \|\bar{a}_\nu - \bar{a}_\mu\| < \varepsilon$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $(\bar{a}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ μια AC $\iff$ $(\bar{a}_\nu)$ συγκλίνει

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η $\bar{a}_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ AC $\iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu,\mu \in \mathbb{N})\ \nu,\mu \geq \nu_0 : \|\bar{a}_\nu - \bar{a}_\mu\| < \varepsilon \iff$

$\iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu,\mu \in \mathbb{N})\ \nu,\mu \geq \nu_0 : \forall i=1,\ldots,n : \|a_\nu^{(i)} - a_\mu^{(i)}\| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall i=1,2,\ldots,n \quad (a_\nu^{(i)}) \subseteq \mathbb{R}^n$ μια AC (*)

άρα (*) $\to (\forall i=1,2,\ldots,n)(\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_i \in \mathbb{N})(\forall \nu,\mu \geq \nu_i)\ \|a_\nu^{(i)} - a_\mu^{(i)}\| < \varepsilon$

$\iff \forall i=1,2,\ldots,n \quad (a_\nu^{(i)})$ συγκλίνει $\iff a_\nu$ συγκλίνει

Συνεπώς, $(\forall i=1,2,\ldots,n)(\forall \varepsilon^*>0)(\exists \nu_0 = \max\{\nu_i\})\ \forall \nu,\mu \geq \nu_0 :$

$: \|a_\nu^{(i)} - a_\mu^{(i)}\| < \varepsilon^*$ όπου έστω $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \sqrt{\sum_{n=1}^{n} |a_\nu^{(i)} - a_\mu^{(i)}|} < \sqrt{n(\varepsilon^*)^2} = \sqrt{n}\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \varepsilon.$

Παρατήρηση: Οι ακολουθίες σε μ.χ χρησιμεύουν πολύ όταν μιλάμε για τοπολογικές ιδιότητες συνόλων

ΠΡΟΤΑΣΗ $1^{η}$: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Το $\bar{x}$ είναι σσ του U $(\delta\eta\lambda\ (\forall \varepsilon>0): B(\bar{x},\varepsilon) \cap U \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset) \iff$

$\iff \exists (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\} : \bar{x}_\nu \to \bar{x}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$(\Rightarrow)$: $(\forall \nu \in \mathbb{N})(\exists\, \bar{x}_\nu \in U \setminus \{\bar{x}\})\ \bar{x}_\nu \in B(\bar{x}, \frac{1}{\nu}) \iff \|\bar{x}_\nu - \bar{x}\| < \frac{1}{\nu}$

αλλά $\nu \to \infty$ το $\frac{1}{\nu} \to 0$ άρα $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}\| \to 0$

δηλ. $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$

$(\Leftarrow)$: Έστω $\varepsilon>0$ τότε $\exists\, \bar{x}_{\nu_0} \in B(\bar{x},\varepsilon)$ και $x_{\nu_0} \in U \setminus \{\bar{x}\}$

άρα $\bar{x}_\nu \in B(\bar{x},\varepsilon) \cap U \setminus \{\bar{x}\}$ και άρα

ειδικότερα $B(\bar{x},\varepsilon) \cap U \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$

Παρατήρηση: (ΑΛΛΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘ.) $(\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\ \nu \geq \nu_0 : \bar{x}_\nu \in B(\bar{x},\varepsilon)$

ΠΡΟΤΑΣΗ $2^{η}$: Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^\nu$. Τότε $\bar{x} \in \bar{U} \iff \exists (\bar{x}_\nu) \subset U : \bar{x}_\nu \to \bar{x}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με τη θεωρία αρκεί νδο το δεξιό μέρος της ισοδυναμίας ισοδυναμεί με το ότι το U περιέχει όλα τα σσ.

$(\Delta\eta\lambda.\ \bar{x} \in \bar{U} \iff \bar{x} \in U$ ή το $\bar{x}$ σσ του $U)$

$(\Leftarrow)$: Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$. Εάν $(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N}): \nu \geq \nu_0$ ώστε $\bar{x}_\nu = \bar{x}$ με $\bar{x}_\nu$ ct (σταθ) ακολουθία τότε $\bar{x} \in U$

Εάν $(\forall \nu \in \mathbb{N})(\exists\, k_\nu \geq \nu)$ με $\bar{y}_\nu := \bar{x}_{k_\nu} \neq \bar{x}$ τότε $\bar{y}_\nu \to \bar{x}$

αφού $k_\nu \geq \nu \to \infty$, δηλ $(\forall \varepsilon>0)(\exists y_\nu \in U \setminus \{\bar{x}\} : \|\bar{y}_\nu - \bar{x}\| < \varepsilon \iff$

$\iff (\forall \varepsilon>0)(\exists\, \bar{y}_\nu \in U \cap B(\bar{x},\varepsilon) \setminus \{\bar{x}\}$

$(\Rightarrow)$: Εάν $\bar{x} \in U$ τότε $\exists (\bar{x}_\nu) \subseteq U$ με $\bar{x}_\nu := \bar{x} \to \bar{x}$.

Εάν $\bar{x} \notin U$ τότε $(\forall \nu \in \mathbb{N})(\exists\, \bar{x}_\nu \in U \cap B(x, \frac{1}{\nu}) \setminus \{\bar{x}\}$ άρα

$\|\bar{x}_\nu - \bar{x}\| < \frac{1}{\nu} \to 0$ δηλ. $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$.